Primer Parcial de Análisis Matemático II

Fecha: 10/07/23 **Apellido y Nombre:**

Curso: Z2057 **Legajo:**

1. Calcule las derivadas direccionales de la función $z = f(x;y) = x ln(y^2) + \sqrt{2xy}$ en el punto $(2;1)$ en la dirección normal a la curva de nivel de la función $z = g(x;y) = x^2 + 2y$ que pasa por dicho punto

---

2. Determine si existen extremos relativos y absolutos para la función $f(x;y) = x^2y - 2y + y^2$ en su dominio natural

---

3. Halle la curva ortogonal; a la familia de curvas en la que la recta tangente en cada punto tiene pendiente igual al cociente entre la ordenada y la abscisa del punto; y pasa por el $(1;-2)$

---

4. Dada la función $z = f(x;y) = 4\sqrt{x+2y}$ con $\begin{cases} x = \frac{u}{v} \\ y = v^2 \end{cases}$ resulta la función compuesta $z = h(u;v)$ a) Halle la ecuación del plano tangente y la recta normal a la superficie $z = h(u;v)$ en el punto $(2;1;h(2;1))$ b) Calcular aproximadamente $h(2{,}02;0{,}99)$

---

5. a) Defina derivada direccional de un campo escalar en un punto de su dominio b) Verifique si existe $f'(\bar{0};\breve{u})$ para $f(x;y) = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$; con $\breve{u} = (-1;0)$

---

6. a) Indique hipótesis para que la ecuación $F(x;y;z) = 0$ defina implícitamente una superficie en un entorno del punto $\bar{A} = (a;b;c)$ b) Verifique si la ecuación $x^2 - z\,ln(y) = 2z$ define una superficie en un entorno del punto $(2;1;2)$

AM2	1° parcial Prof. Hernández	HOJA N° 1/3 FECHA 10-7-23

① Calcular las derivadas direccionales de la función $z = f(x,y)$
$z = x\ln(y^2) + \sqrt{2xy}$ en el punto $(2,1)$ en la dirección normal a la curva de nivel de la función $z = g(x,y) = x^2 + 2y$ que pasa por dicho punto

En el punto $(2,1)$ f es diferenciable $\rightarrow f'((2,1),\check{v}) = \nabla f_{(2,1)} \cdot \check{v}$

$F(x,y,z) = x\ln(y^2) + \sqrt{2xy} - z$ $\quad f'_{x(2,1)} = \dfrac{-F'_{x(2,1,z)}}{F'_{z(2,1,z)}}$; $f'_{y(2,1)} = \dfrac{-F'_{y(2,1,z)}}{F'_{z(2,1,z)}}$

$x=2$, $y=1$

$z = 2\ln(1^2) + \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 1} = 2$ $\quad \boxed{z_0 = 2}$

$F'_x = \ln(y^2) + \dfrac{\cancel{2}y}{2\sqrt{2xy}} \rightarrow F'_{x(2,1,2)} = \dfrac{1}{2}$

$F'_y = \dfrac{x2y}{y^2} + \dfrac{2x}{2\sqrt{2xy}} \longrightarrow F'_{y(2,1,2)} = 4+1 = 5$

$F'_z = -1 \longrightarrow F'_{z(2,1,2)} = -1$

$f'_{x(2,1)} = \dfrac{-1/2}{-1} = \dfrac{1}{2}$

$f'_{y(2,1)} = \dfrac{-5}{-1} = 5$

$\boxed{\nabla f_{(2,1)} = (1/2, 5)}$

El gradiente de una función es perpendicular a los conj. de nivel

$\Rightarrow \vec{v} \parallel \nabla g_{(2,1)}$

$\nabla g_{(x,y)} = (2x, 2) \longrightarrow \nabla g_{(2,1)} = (4,2)$ $\quad \check{v} = \dfrac{(4,2)}{\|(4,2)\|}$

$\|(4,2)\| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} \rightarrow \check{v} = \left(\dfrac{4}{\sqrt{20}}, \dfrac{2}{\sqrt{20}}\right) \rightarrow \boxed{\check{v}_1 = \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)}$

$\boxed{\check{v}_2 = \left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)}$

$f'((2,1),\check{v}_1) = \left(\dfrac{1}{2}, 5\right)\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{5} + \sqrt{5} = \dfrac{6}{5}\sqrt{5}$

$f'((2,1),\check{v}_2) = \left(\dfrac{1}{2}, 5\right)\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\dfrac{6}{5}\sqrt{5}$

$\boxed{f'((2,1),\check{v}_1) = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}}$ $\quad \boxed{f'((2,1),\check{v}_2) = \dfrac{-6\sqrt{5}}{5}}$

NOTA

② Determinar si existen extremos relativos y absolutos para la función

$$f(x,y) = x^2y - 2y + y^2 \quad \text{en su dom. natural}$$

$PC: (x,y) \;/\; \nabla f_{(x,y)} = (0,0)$

$$\begin{cases} f'_x = 2xy = 0 \longrightarrow \boxed{x=0} \vee y=0 \\ f'_y = x^2 - 2 + 2y = 0 \longrightarrow \text{si } x=0 \rightarrow 0^2 - 2 + 2y = 0 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{PC_1 = (0,1)}$$

si $\boxed{y=0}$: $x^2 - 2 + 2 \times 0 = 0 \rightarrow |x| = \sqrt{2}$

$$\boxed{PC_2 = (\sqrt{2}, 0)} \quad \boxed{PC_3 = (-\sqrt{2}, 0)}$$

Hessiana

$f''_{xx} = 2y$

$f''_{xy} = 2x \quad \rightarrow H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$

$f''_{yy} = 2$

$|H_{(0,1)}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ y $f''_{xx} = 2 > 0 \rightarrow \boxed{f_{(0,1)} \text{ es mínimo RELATIVO}}$

$|H_{(\sqrt{2},0)}| = \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \rightarrow$ No es extremo

$|H_{(-\sqrt{2},0)}| = \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \rightarrow$ No es extremo

$f_{(0,1)} = 0^2 \times 1 - 2 \times 1 + 1^2 = -1$

$f_{(10,-1)} = 10^2(-1) - 2(-1) + (-1)^2 = -100 + 2 + 1 = -97 < -1$

$f_{(0,1)}$ NO es extremo absoluto

$\boxed{\nexists \text{ extremos absolutos}}$

NOTA

AM2	1° parcial Prof. Hernandez	HOJA N° 2/3 FECHA 10/7/23

③ Hallar la curva ortogonal a la familia de curvas en que la recta tangente en cada punto tiene pendiente igual al cociente entre la ordenada y la abscisa del punto y pasa por (1,-2)

y_1 es la curva cuya pendiente es igual que el coc. entre ord y absc

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow y_2 = y_{1\perp} \longrightarrow y_2' = -\frac{x}{y} = \frac{dy}{dx}$$

integro mam

$$\int -x\,dx = \int y\,dy$$

$$\frac{-x^2}{2} + c = \frac{y^2}{2} \overset{k=2c}{\Rightarrow} \boxed{x^2 + y^2 = k}$$

pasa por (1,-2)

$x = 1$
$y = -2$ $\longrightarrow (1)^2 + (-2)^2 = k = 5$

$$\boxed{C: x^2 + y^2 = 5}$$

NOTA

④ Dada la función $z = f(x,y) = 4\sqrt{\cancel{x}+2y}$ con $\begin{cases} x = \frac{u}{v} \\ y = v^2 \end{cases}$

resulta la función compuesta $z = h(u,v)$

a) Hallar la ec. del plano tang. y la recta normal a la sup $z = h(u,v)$ en el punto $(2,1,h(2,1))$ $\mathbb{L}$

$$\bar{g}(u,v) = \left(\frac{u}{v}, v^2\right) \rightarrow h_{(u,v)} = f(\bar{g}(u,v))$$ en (2,1) es diferenciable

$$Dh(2,1) = Df(\bar{g}(2,1)) \cdot D\bar{g}(2,1) = $$
$$= Df(2,1) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= [1 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [1 \quad 2]$$

$$\boxed{\nabla h_{(2,1)} = (1,2)}$$

- $\bar{g}(2,1) = (2,1)$
- $D\bar{g}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & \frac{u}{-v^2} \\ 0 & 2v \end{pmatrix}$

$$\hookrightarrow D\bar{g}(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $f_{(x,y)} = 4\sqrt{x+2y}$

$$f'_x = \frac{4}{2\sqrt{x+2y}} = \frac{2}{\sqrt{x+2y}}$$

$$\boxed{f'_{x(2,1)} = 1}$$

$$f'_y = \frac{4 \cdot 2}{2\sqrt{x+2y}} = \frac{4}{\sqrt{x+2y}} = 2 \rightarrow \boxed{f'_{y(2,1)} = 2}$$

$$h(2,1) = f(2,1) = 4\sqrt{2+2\cdot1} = \boxed{8 = h(2,1)}$$

$$z = \underbrace{h(2,1)}_{8} + \underbrace{h'_u(2,1)}_{1}(u-2) + \underbrace{h'_v(2,1)}_{2}(v-1)$$

$$z = 8 + u - 2 + 2v - 2 \longrightarrow \boxed{z = u + 2v + 4}$$ Pl. tg.

$$\hookrightarrow N = (1,2,-1)$$

$$\boxed{\mathbb{L}: \bar{\beta}(t) = t\,(1,2,-1) + (2,1,8)}$$

b) Calcular, aproximadamente $h(2{,}02\,;\,0{,}99)$

Uso el plano tg: $h(2.02, 0{,}99) \cong 2{,}02 + 2 \times 0{,}99 + 4 = \boxed{8 \cong h_{(2.02,\,0.99)}}$

NOTA

AM2	1º parcial Prof. Hernández	HOJA Nº 3/3 FECHA 10/7/23

(5) a) Definir derivada direccional de un campo escalar en un punto de su dominio

$\check{v}$ es un versor de X^n $\qquad \bar{X}_0 \in Df$

$$f'(\bar{X}_0, \check{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{X}_0 + h\check{v}) - f(\bar{X}_0)}{h}$$

b) Verificar, si $\exists$, $f'(\bar{0}; \check{u})$ para $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\quad \check{u} = (-1,0)$

$\check{v} = (a,b)$

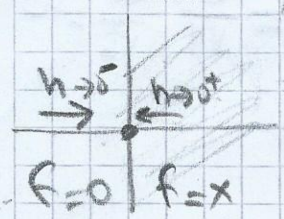
$$f'((0,0),(-1,0)) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h(-1,0)) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-h,0)}{h} =$$

$a < 0$

si $h \to 0^-$ $\rightarrow$ * $\lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$

$\bullet$ $\lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$

$\Big\} \neq$ $\boxed{\nexists \lim_{h \to 0} \rightarrow \nexists f'((0,0),(-1,0))}$



si $h \to 0^+ \rightarrow f(x,y) = x$

NOTA

⑥ a) Indicar V o F:

Si $z = f(\bar{x})$ con $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \wedge \exists f'(\bar{a}, \check{u}) \Rightarrow f'(\bar{a}, \check{u}) = \nabla f(\bar{a}) \cdot \check{u}$

(F) Eso ocurre si la función f es diferenciable. Pero no se asegura cuando no lo es

b) Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = x\sqrt{y}$ en el punto $(4,4)$ en la dirección que va del punto $(4,4)$ a $(5,2)$

en $(4,4)$ f es diferenciable (podría no serlo en $y=0$ pues $\sqrt{y}' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$)

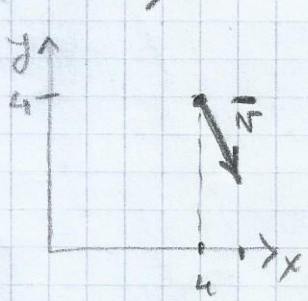
f es dif en $(4,4)$ entonces

$$f'((4,4), \check{v}) = \nabla f(4,4) \cdot v = (2,1)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\boxed{f'((4,4), \check{v}) = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = \sqrt{y} \longrightarrow f'_x(4,4) = \sqrt{4} = 2 \\ f'_y = \frac{x}{2\sqrt{y}} \longrightarrow f'_y(4,4) = \frac{4}{2\sqrt{4}} = 1 \end{array}\right\} \nabla f(4,4) = (2,1)$$

$\boxed{\check{v}} \rightarrow \bar{v}$ va de $(4,4)$ a $(5,2)$ $\rightarrow$ direcc $= (5,2) - (4,4) = (1,-2)$



$\bar{v} = (1,-2)$

$$\check{v} = \frac{(1,-2)}{\|\bar{v}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

$\|\bar{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

NOTA